

WERNER-HEISENBERG-GYMNASIUM

Projektarbeit

im Rahmen des Physik-Projektkurses PPH-PK1

Der Weg nach oben – Luftdruck in Abhängigkeit von der Höhe

vorgelegt von

Noah Vincze

07.06.2021



Inhaltsverzeichnis:

1. Einleitung	1
2. Formeln zur Modellierung des Luftdrucks	1
2.1 Die barometrische, beziehungsweise die erweiterte barometrische Höhenformel	1
2.2 Die internationale Höhenformel	2
2.3 Die Formel der NASA	2
3. Luftdruckmessung mit dem Strato 3	4
3.1 Der Aufbau und die Sensoren des Strato 3 Datenloggers	4
3.2 Funktionsweise des Luftdrucksensors Bosch BME 280	5
4. Ergebnisse und Auswertung der Luftdruckdaten	6
4.1 Vergleich gemessener Daten mit barometrischer Höhenformel	7
4.2 Vergleich mit internationaler Höhenformel	10
4.3 Vergleich mit der erweiterten barometrischen Höhenformel	13
4.4 Vergleich mit NASA Formel	20
5. Zusammenfassung der Analyse	22

1. Einleitung

Schon seit 1896 wurden Wetterballons eingesetzt, um sich mehr Wissen über die Troposphäre und Stratosphäre anzueignen. Einer der ersten, welcher von dieser Technik Gebrauch machte, war der französische Meteorologe Léon-Philippe Teisserenc de Bort. Unser Stratosphärenballon, welcher am 20. März 2021 gestartet wurde, basiert auf derselben Technik.

Bei unserem Flug ließen wir mehrere Sensoren mitfliegen. Einer davon war der Luftdrucksensor, auf welchen man in dieser Arbeit einen besonderen Fokus legen wird. Dazu werden verschiedene Formeln benutzt, welche alle auf anderen Annahmen basieren. Es wird herausgestellt, welche der Formel am besten für der Modellierung des Luftdrucks geeignet ist und wie die Ergebnisse in Zukunft noch verbessert werden können.

2. Formeln zur Modellierung des Luftdrucks

2.1 Die barometrische und die erweiterte barometrische Höhenformel

Die barometrische Höhenformel beschreibt die Abnahme des Luftdrucks in Abhängigkeit von der Höhe. Eingesetzt werden kann diese Formel nur für eine isotherme Atmosphäre, welche voraussetzt, dass es keine Temperaturabnahme gibt. Die barometrische Höhenformel lautet:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0} \cdot h}$$

Bei dieser Formel wird der Luftdruck in Hektopascal beschrieben. Da der Term $-g \cdot \frac{\rho_0}{p_0}$ nur aus Konstanten besteht, kann man diesen zu $-\frac{1}{H_0}$ vereinfachen, wobei H_0 7992,63m beträgt.

Daraus ergibt sich folgende Formel:

$$p(h) = p_0 \cdot e^{-\frac{h}{H_0}}$$

Wie anfangs erwähnt, geht diese Formel von einer isothermen Atmosphäre aus, was bei einem großen Höhenunterschied nicht angenommen werden kann.

Eine bessere Alternative ist die erweiterte barometrische Höhenformel, welche sich auf eine lineare Temperaturabnahme stützt. Diese lautet:¹

$$p(h) = p_0 \cdot \left(1 + \frac{\Gamma}{T_0} \cdot h\right)^{-\frac{g}{\Gamma \cdot R_s}}$$

Hierbei steht Γ für den Temperaturgradienten, welcher aus den gemessenen Daten gewonnen werden kann. T_0 steht für die Anfangstemperatur und R_s gibt die spezifische Gaskonstante von Luft mit einem Wert von $287,058 \frac{J}{kg \cdot K}$ an.

2.2 Die internationale Höhenformel

Die internationale Höhenformel lautet:

$$p(h) = 1013 \cdot \left(1 - \frac{6,5 \cdot h}{288.000}\right)^{5,255}$$

Die Formel ist speziell für die Troposphäre entwickelt worden. Sie hat vier Voraussetzungen, damit sie gültig ist:

Die Erste ist der Startluftdruck von 1013,25hPa. Die Zweite ist eine lineare Abnahme der Temperatur von 0,65 Kelvin pro 100m. Die dritte Bedingung ist eine Starttemperatur, welche dem Jahresmittel von 15°C entspricht. Die letzte Voraussetzung ist, dass mit Höhenwerten aus der Troposphäre gerechnet wird ($h < 11000$). Die vierte und die zweite Voraussetzung bedingen sich gegenseitig, da nur in der Troposphäre eine solche Abnahme der Temperatur zu beobachten ist.² In der Stratosphäre, welche sich von dem Ende der Troposphäre bis zu ungefähr 50km erstreckt, ist teilweise sogar eine Temperaturzunahme zu beobachten.

¹ [Tec-science], „Herleitung der erweiterten barometrischen Höhenformel (adiabatische Atmosphäre)“, <https://www.tec-science.com/de/mechanik/gase-und-fluessigkeiten/erweiterte-barometrische-hohenformel-fur-eine-adiabatische-atmosphaere/#~:text=Die%20erweiterte%20barometrische%20H%C3%B6henformel%20dient,Schichten%20ein%20linearer%20Temperaturverlauf%20angenommen.,Stand:20.05.2021>

² [Wetter- und Klimaprojekt Herrenberg], „Die internationale Höhenformel“, <http://wetter.andreae-gymnasium.de/interaktives/Druck/hohenformel.htm>, Stand: 20.05.2021

2.3 Die Formel der NASA

Die NASA gibt bis zur oberen Stratosphäre drei Formeln an, aus welchen man den Luftdruck modellieren kann. Für die Troposphäre, welche sich bis zu einer Höhe von 11km erstreckt, gilt dabei folgende Formel:

$$p = 1012,9 \cdot \left(\frac{T + 273,1}{288,08} \right)^{5,256}$$

In der Formel ist zu erkennen, dass der Druck exponentiell absinkt. Gleichzeitig ist eine lineare Temperaturabnahme zu beobachten, welche sich durch folgende Formel ausdrücken lässt:

$$T = 15,04 - 0,00649 \cdot h$$

Diese Formel und alle anderen Formeln der NASA wurden durch Erfahrungswerte gebildet und sind auf ihren speziellen Wirkungsbereich zugeschnitten. Bei dieser Formel für die Temperatur ist wegen der eben genannten linearen Temperaturabnahme, ein Aufbau folgender Art zu erkennen:

$$y = m \cdot x + b$$

Der y-Achsenabschnitt b ist hierbei die durchschnittliche Jahrestemperatur auf Meereshöhe, welche 15,04°C beträgt. Die Steigung m ist der sogenannte Temperaturgradient, welcher die Temperaturabnahme in Abhängigkeit von der Höhe beschreibt. Der Temperaturgradient wird in einem späteren Punkt dieser Arbeit genauer erläutert. Mit der Höhe, als sich einzig verändernde Variable, lässt sich nun einfach die Temperatur zu einer bestimmten Höhe ausrechnen.

Die Luftdruckmodellierung der Stratosphäre wurde von der NASA in zwei verschiedene Formeln eingeteilt, da sonst die Temperaturänderung nicht hinreichend beschrieben werden kann. Für den Luftdruck der unteren Stratosphäre, welche sich von 11km bis 25km erstreckt, wird dabei mit folgender e-Funktion gerechnet:

$$p = 226,5 \cdot e^{(1,73 - 0,000157 \cdot h)}$$

In der unteren Stratosphäre sinkt der Luftdruck exponentiell, wobei die Temperatur dabei konstant bleibt.

In der oberen Stratosphäre fängt die Temperatur wieder leicht an zu steigen und der Luftdruck sinkt weiter exponentiell. Für Höhenwerte über 25km gilt daher:

$$p = 24,88 \cdot \left(\frac{T + 237,1}{216,6} \right)^{-11,388}$$

Da die Temperatur in der oberen Stratosphäre linear zunimmt, kann dafür folgende Formel verwendet werden:³

$$T = -131,21 + 0,00299 \cdot h$$

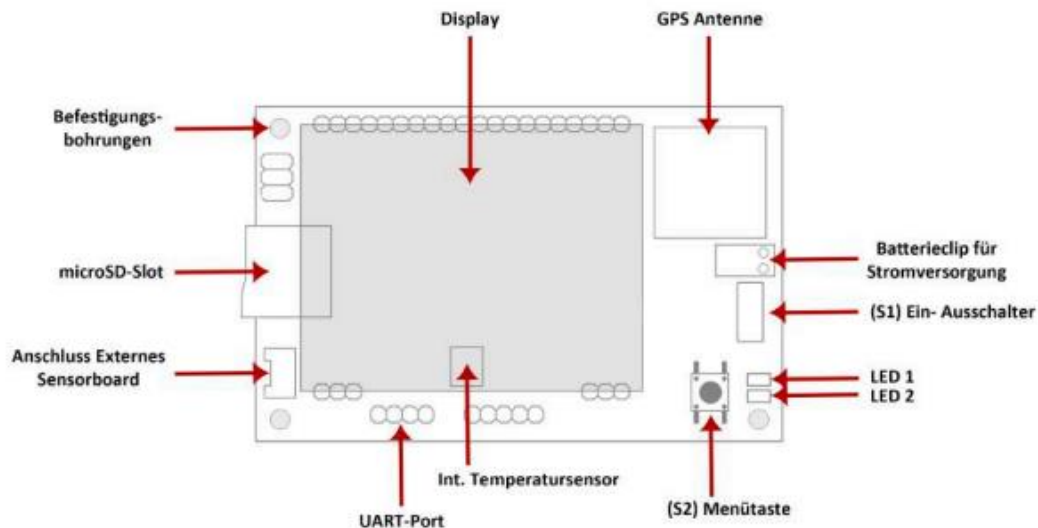
3. Luftdruckmessung mit dem Strato 3

3.1 Der Aufbau und die Sensoren des Strato 3 Datenloggers

Der Strato 3 Datenlogger wurde speziell für Stratosphärenflüge entwickelt und ist somit optimal angepasst. Dies zeigt sich an den vielen Sensoren, welche auf einen möglichst kleinen Raum zusammengebracht worden sind. Die folgende Abbildung (1) zeigt die Hardware des Datenloggers:⁴

³[NASA Official: Nancy Hall] „Earth Atmosphere Model“, <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/airplane/atmosmet.html>, Stand: 20.05.2021

⁴ [stratoflights], „Datenlogger STRATO3“, https://www.stratoflights.com/downloads/anleitung_datenlogger.pdf, Stand: 24.05.2021



Auf dem Display können verschiedene Daten angezeigt werden. Die Daten sind auf drei unterschiedliche Menüs aufgeteilt, wobei durch Drücken der Menütaste (S2) auf das Menü gewechselt werden kann. Auf allen Menüs werden die Laufzeit und die Batteriespannung angezeigt. Das erste Menü enthält dazu noch die koordinierte Weltzeit, das Datum, den aktuellen Dateinamen, und den GPS-Status („Data valid“, „Data not valid“). Das zweite Menü ist für die Sensoren des Datenloggers ausgelegt und das dritte Menü zeigt die GPS-Daten an.

Der Strato 3 Datenlogger hat vier verschiedene Sensoren und eine GPS-Antenne. Der erste Sensor ist der interne Temperatursensor, welcher auf dem Display als „Board Temp“ in °C gekennzeichnet ist. Wie auf Abbildung 1 zu erkennen ist, befindet dieser sich unterhalb des Displays. Das Gegenstück zum internen Temperatursensor ist der externe Temperatursensor, welcher sich auf dem externen Sensorboard befindet und auf dem Display mit „Extern Temp“ in °C gekennzeichnet ist. Das externe Sensorboard wird während des Stratosphärenfluges durch ein Loch an der Außenseite der Styroporbox befestigt. Auf diesem externen Sensorboard befinden sich noch der Luftfeuchtigkeits- und Luftdrucksensor. Der Luftfeuchtigkeitssensor ist mit „Extern Hum“ in % angegeben und der Luftdrucksensor ist mit „Extern Press“ in hPa auf dem Display zu sehen.

Durch die GPS-Antenne, welche sich oben rechts am Datenlogger befindet, kann der Breiten- und Längengrad in Grad und Dezimalminuten, sowie die Höhe über NN [m], Course over Ground in [Grad] und „Speed over Ground“ in [km/h] gemessen werden. Des Weiteren kann die Anzahl der aktuell verwendeten Satelliten abgelesen werden.

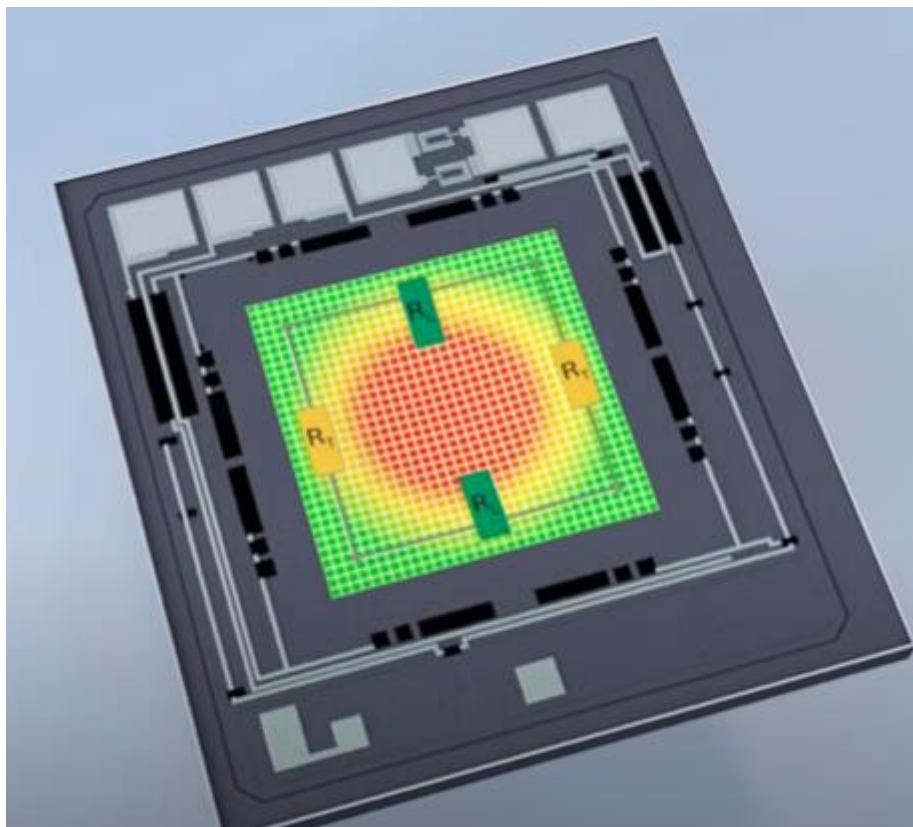
Beim Anschalten des Datenloggers wird mit der Aufzeichnung der Daten begonnen, welche dann anschließend als Log-Datei auf der SD-Karte gespeichert werden. Mit dieser Datei ist es möglich, die Daten zu sichten.

3.2 Funktionsweise des Luftdrucksensors des Bosch BME 280

Der Bosch BME 280 besitzt einen Luftfeuchtigkeitssensor, einen Temperatursensor und einen Luftdrucksensor. Im folgenden Abschnitt wird die grobe Funktionsweise des Luftdrucksensors erklärt.

Im Strato 3 Datenlogger ist ein anderer Sensor eingebaut, allerdings ist es nicht gelungen die Modellnummer zu identifizieren. Jedoch ist die Funktionsweise des eingebauten Luftdrucksensors dieselbe, wie die des Bosch BME 280.

Der Schaltkreis des Sensors ist wie folgt aufgebaut:⁵



Wie zu erkennen ist, sind die verschiedenen Widerstände zu einer Wheatstonebrücke zusammengeschlossen. Die Widerstände liegen auf einer Membran, welche sich unter Druck eindrückt. Wenn die Membran eingedrückt wird, dann entsteht eine Spannung, für welche

⁵ [Bosch Mobility Solutions], „Bosch Funktionsprinzip eines Drucksensors“, <https://www.youtube.com/watch?v=3MaQejkTHSQ>, Stand: 02.06.2021

gilt: Je stärker der Druck ist, desto mehr wird die bewegliche Membran eingedrückt, was wiederum eine größere Spannung entstehen lässt. Dieses Prinzip der Wheatstonebrücke ist auch in vielen Haushaltsgegenständen wie der Waage enthalten. Im Allgemeinen kann man dieses Prinzip auf alle Kraftmessungen anwenden.

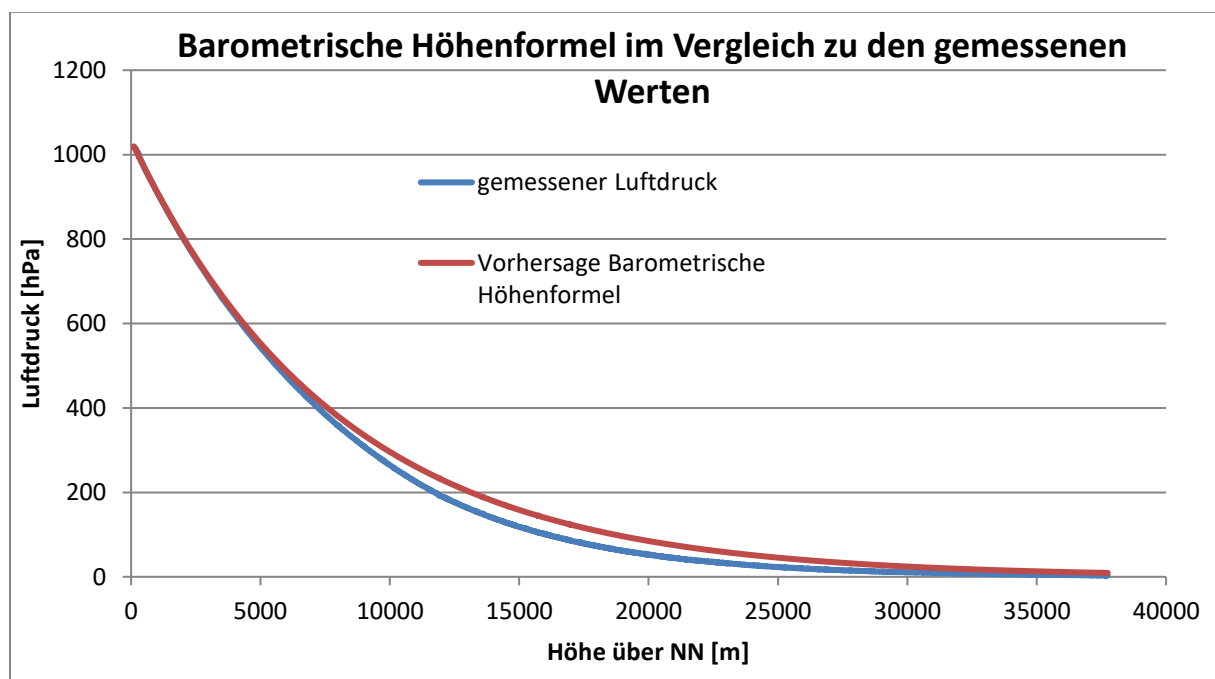
Der Wirkungsbereich des Bosch BME 280 beläuft sich nach Herstellerangaben von 300 bis 1100 hPa. Da die gemessenen Werte bis auf 3 hPa fallen kann es zu Ungenauigkeiten bei den gemessenen Werten kommen.

4. Ergebnisse und Auswertung der Luftdruckdaten

Um die Daten auszuwerten, wird von der ungenauesten Formel hin zur genauesten Formel übergegangen. Inwiefern die Formeln genauer sind, wird in der Auswertung diskutiert.

4.1 Vergleich gemessener Daten mit der barometrischen Höhenformel

Nach dem Einsetzen der Höhenwerte in die barometrische Höhenformel gibt sich folgendes Diagramm (alle Diagramme befinden sich nochmals in der beigelegten Excel-Datei):



Zum Zeitpunkt des Abhebens befindet sich der Ballon bereits auf einer Höhe von ca. 110 Metern und es wird ein Luftdruck von 1019,1 hPa gemessen. Nach der barometrischen Höhenformel beträgt der Luftdruck zu dieser Höhe 1005,31 hPa. Um bessere Messergebnisse zu erhalten, kann man die barometrische Höhenformel ein wenig anpassen, damit am Anfang beide Werte übereinstimmen.

Um dies zu tun, wird folgende Gleichung gelöst und nach p_0 umgeformt:

$$1019,1 \text{ hPa} = p_0 \cdot e^{-\frac{109,6 \text{ m}}{7992,63 \text{ m}}} \quad (1)$$

$$p_0 = 1033,16 \text{ hPa} \quad (2)$$

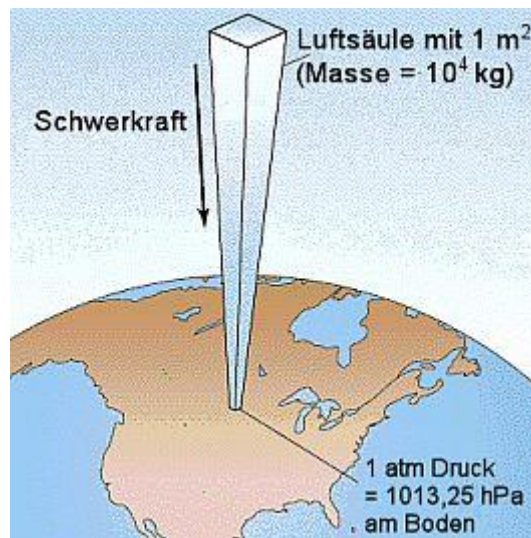
Dieser neue Wert für p_0 wird nun auch für alle anderen Werte verwendet.

Beide Graphen haben eine exponentielle Abnahme, was am Diagramm gut zu erkennen ist.

Um zu erklären, wie diese Abnahme entsteht, muss man definieren was Luftdruck bedeutet.

Luftdruck ist die Gewichtskraft der gesamten Luftsäule, welche auf eine Fläche wirkt.

Bildlich lässt sich das so vorstellen:⁶

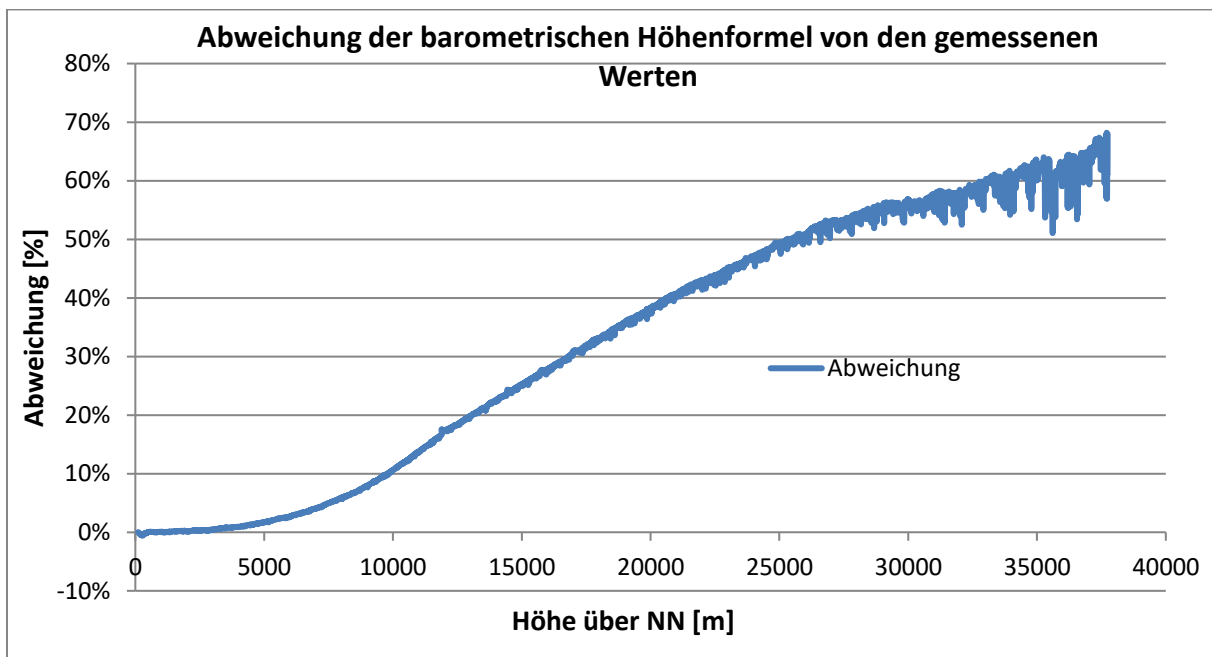


Wie auf dem Bild zu erkennen, geht die Luftsäule bis zum Rand der Atmosphäre. Die Luftsäule wird dann von der Schwerkraft angezogen. Folglich ist der Luftdruck größer, wenn die Luftsäule höher ist. Je höher man geht, desto kleiner wird die Luftsäule über einem und in Folge dann auch der Luftdruck. Daraus würde man auf eine lineare Abnahme des Luftdrucks schließen. Diese Annahme ist vom Prinzip richtig, jedoch befindet sich nicht überall gleich viel Luft. Die Dichte der Luft nimmt mit der Höhe exponentiell ab, da die Luftmassen durch die Erdanziehungskraft „zusammengedrückt“ werden und folglich nahe der Erdoberfläche die Luft schwerer als in großen Höhen ist. Dadurch übt ein Kubikmeter Luft bei geringeren

⁶ [unbekannter Autor] „Gerd Pfeffer“, <http://www.gerd-pfeffer.de/images/luftssaeule.jpg>, Stand: 30.05.2021

Höhen eine größere Kraft aus. Infolgedessen nimmt der Luftdruck nicht linear, sondern exponentiell ab.

Die Abweichung der Werte der barometrischen Höhenformel von den gemessenen Luftdruckwerten in Abhängigkeit von der Höhe lässt sich in folgendem Diagramm beschreiben:

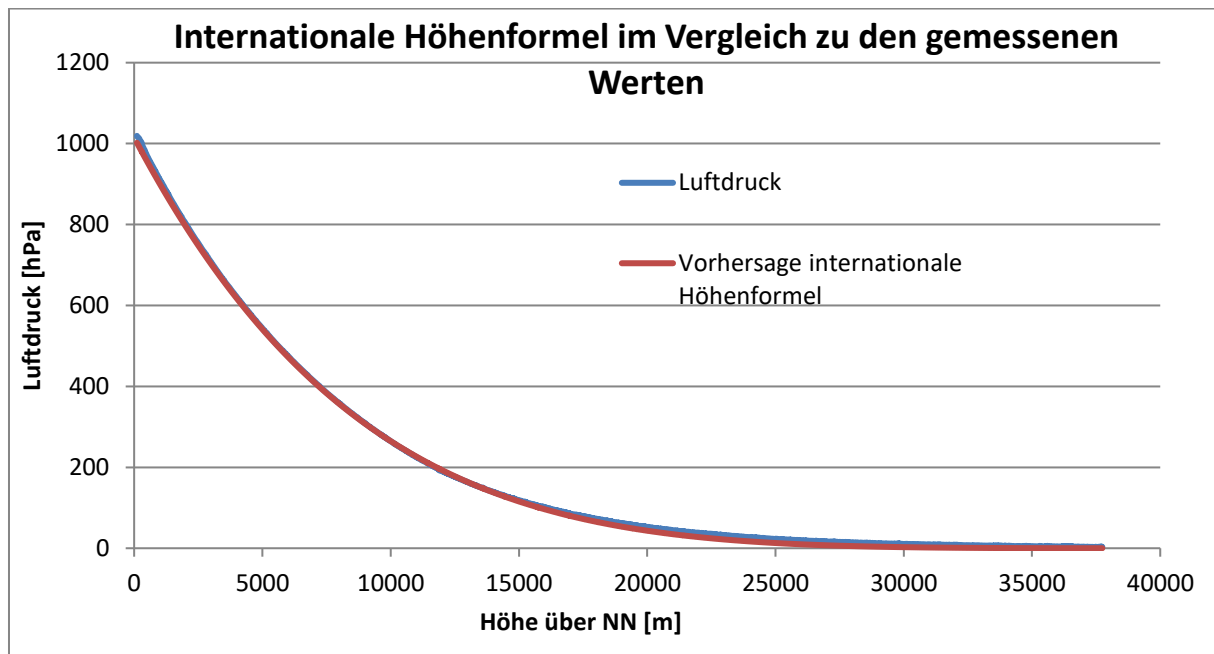


Wie hier zu erkennen ist, wird die Abweichung mit steigender Höhe immer größer und wird an keinem Punkt kleiner. Zu erklären ist dies mit der Temperaturänderung, welche die barometrische Höhenformel aufgrund der Annahme einer isothermen Atmosphäre nicht berücksichtigt. Die vielen Schwankungen, welche besonders bei den großen Höhenwerten auffallen, lassen sich damit begründen, dass die Auflösung des Sensors nicht sehr genau ist. Bei einer Abweichung von 1hPa hat es bei den größeren Luftdruckwerten von ca. 1200hPa einen viel geringeren Einfluss als bei Werten von 3hPa, wie es bei großen Höhenwerten der Fall war.

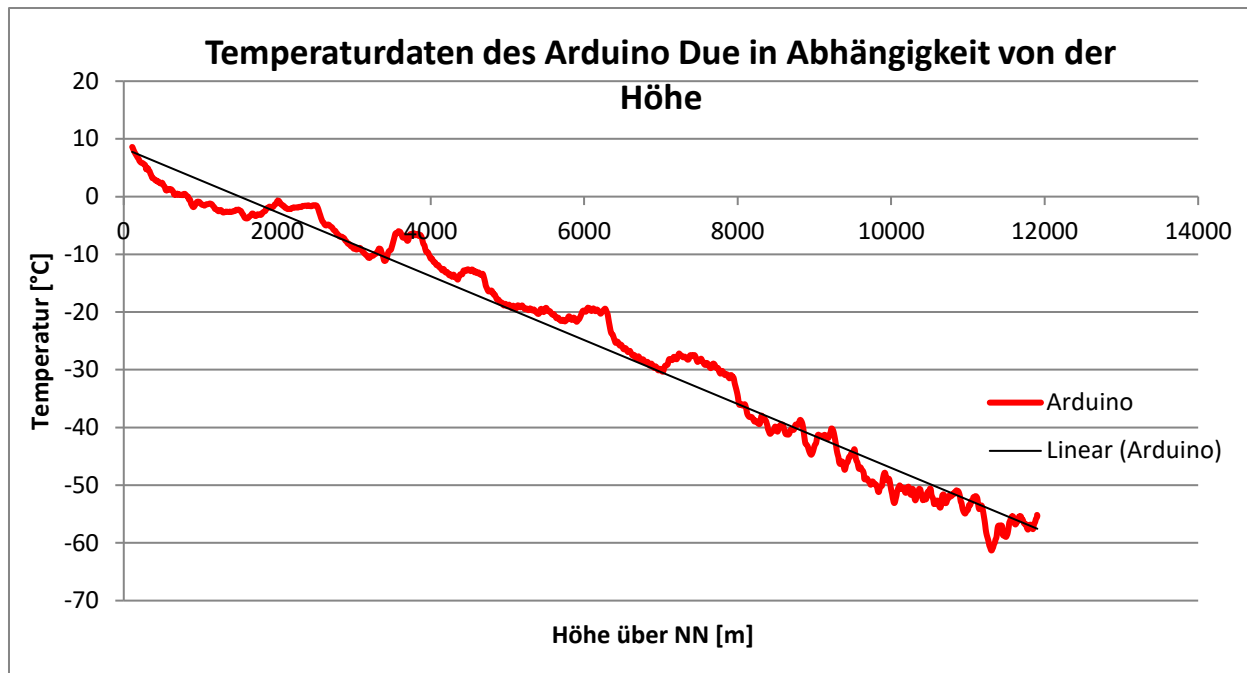
Auf große Höhenänderungen bezogen, ist die barometrische Höhenformel wegen einer Temperaturabnahme, beziehungsweise Temperaturzunahme und der damit verbundenen Ungenauigkeit des errechneten Luftdrucks ungeeignet.

4.2 Vergleich mit der internationalen Höhenformel

Wie Anfangs erwähnt, gilt die internationale Höhenformel nur für die Troposphäre und wird in der Stratosphäre ungenau. Trotzdem wird das ganze Diagramm gezeigt:



Wie auf dem Diagramm zu erkennen ist, liegt der Graph der internationalen Höhenformel besonders in den ersten 17.000 Höhenmetern nahe den Messwerten. Dies ist damit zu erklären, dass die internationale Höhenformel wie anfangs erwähnt von einer linearen Abnahme der Temperatur ausgeht. Dabei wird eine Abnahme von 0,65 Kelvin pro 100m vorhergesehen, was einem Temperaturgradienten von $-0,0065$ Kelvin pro Meter entspricht. Aus den Temperaturdaten des Arduino Due in den ersten 12.000 Metern über NN ergibt sich folgendes:



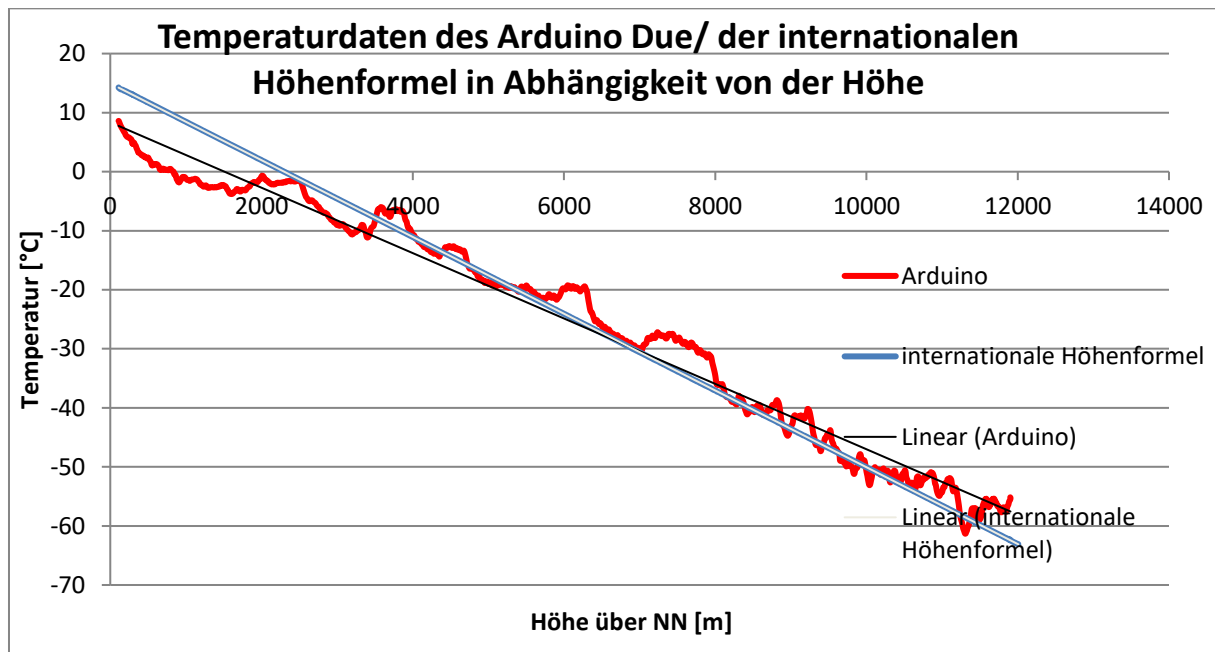
Da es in den Werten leichte Schwankungen gibt, wurde eine Trendlinie eingezeichnet, welche folgende Gleichung besitzt:

$$y = -0,0055x + 8,3607$$

Die lineare Abnahme der Temperatur lässt sich mit den Messdaten bestätigen. Dabei ist $-0,0055$ die durchschnittliche Temperaturabnahme pro Meter, also der Temperaturgradient, und $8,36$ die Temperatur bei NN. Verglichen mit dem vorgegebenen Wert der internationalen Höhenformel liegt eine Abweichung von rund 18,18% vor. Je geringer die Abweichung ist, desto mehr gleicht sich die Steigung der beiden Graphen.

Anfangs ist die gemessene Temperatur größer als die der internationalen Höhenformel. Diese Verschiebung ist auf die unterschiedlichen Starttemperaturen von $8,3607^{\circ}\text{C}$ bei den gemessenen Werten und 15°C bei der internationalen Höhenformel zurückzuführen, denn es gilt: Je höher die Temperatur, desto geringer ist der Luftdruck. Dieser Sachverhalt lässt sich damit erklären, dass Luft mit zunehmender Temperatur an Volumen gewinnt. Folglich ist die Dichte und damit der Luftdruck geringer. Betrachtet man nun den Unterschied der beiden Graphen bis zu einer Höhe von ca. 9.000m, dann fällt auf, dass die Abweichung immer geringer wird und bei 9.000m das erste Mal der blaue Graph unter dem roten Graphen liegt. Dies hängt damit zusammen, dass der Temperaturgradient der internationalen Höhenformel um 18,18% größer als der von dem Arduino Due in den ersten 12.000m. Mathematisch ausgerechnet sollten die beiden Temperaturkurven sich das erste Mal bei ca. 6.900m treffen.

Hierbei muss allerdings beachtet werden, dass die Werte mit einer Trendlinie ausgerechnet wurden und abweichen können. Das folgende Diagramm zeigt den Temperaturverlauf der internationalen Höhenformel (in blau) im Vergleich zu den gemessenen Daten des Arduino Due (in Rot bzw. Schwarz):



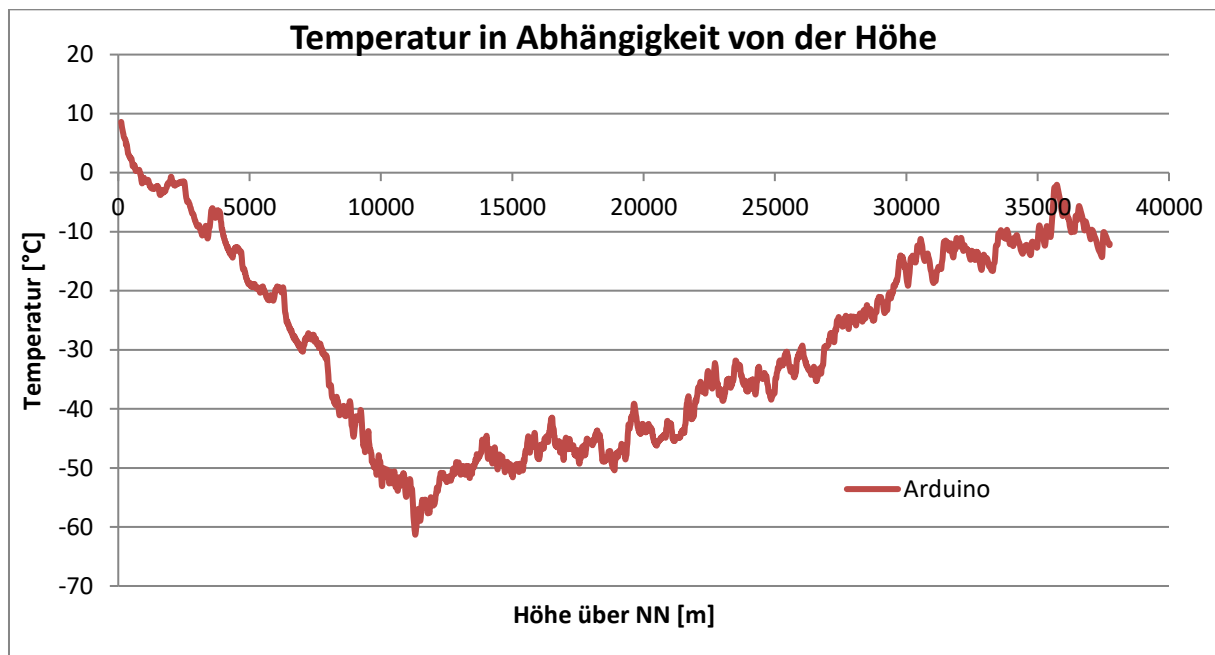
Der graue Graph schneidet sich mit der Trendlinie (schwarz) der gemessenen Daten schon bei 6.900m, wobei der rote Graph (die gemessene Temperatur des Arduino Due) schon das erste Mal bei 2.200m den grauen Graphen schneidet. Danach geht der rote Graph wieder unter den grauen Graphen und ist ab ca. 6.000m größtenteils über dem grauen Graphen. Der rote Graph hat sehr viele Schwankungen und fällt nicht linear. Möglicherweise liegen Messfehler vor, was aber in dieser Arbeit nicht behandelt wird, weswegen die Trendlinie als Referenzmittel zur Temperatur des Arduino Due im weiteren Verlauf angenommen wird. Wenn man nur die Trendlinie der Temperatur des Arduino Due betrachtet, dann wird der Schnittpunkt klar ersichtlich. Im weiteren Verlauf liegt die Temperatur der internationalen Höhenformel stets unter dem schwarzen Graphen, was für einen geringeren Luftdruck spricht und erklärt, warum der angegebene Luftdruck der internationalen Höhenformel ab ca. 9.000m immer unter den der gemessenen Werte liegt. Dies gilt bis zu der maximalen Höhe, da der gemessene Temperaturgradient danach im Vergleich zu den ersten 12.000m immer kleiner ist.

Wie Anfangs erwähnt, ist die internationale Höhenformel speziell für die Troposphäre ausgelegt. Daraus folgt, dass man unterschiedliche Temperaturgradienten in Abhängigkeit

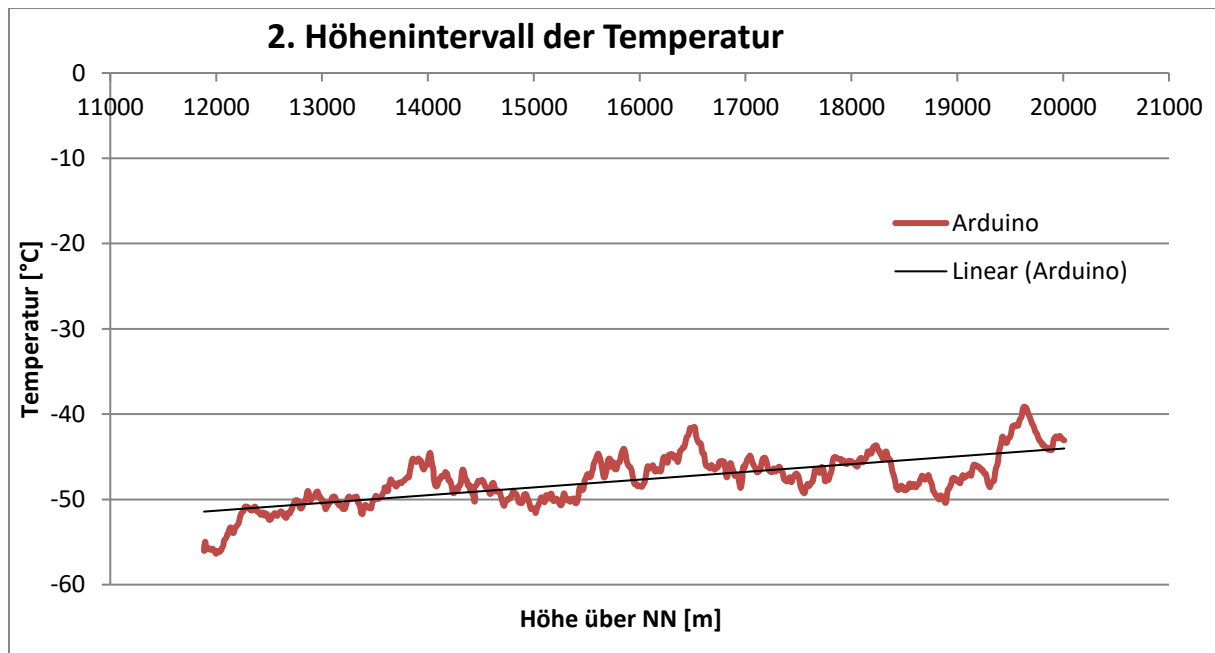
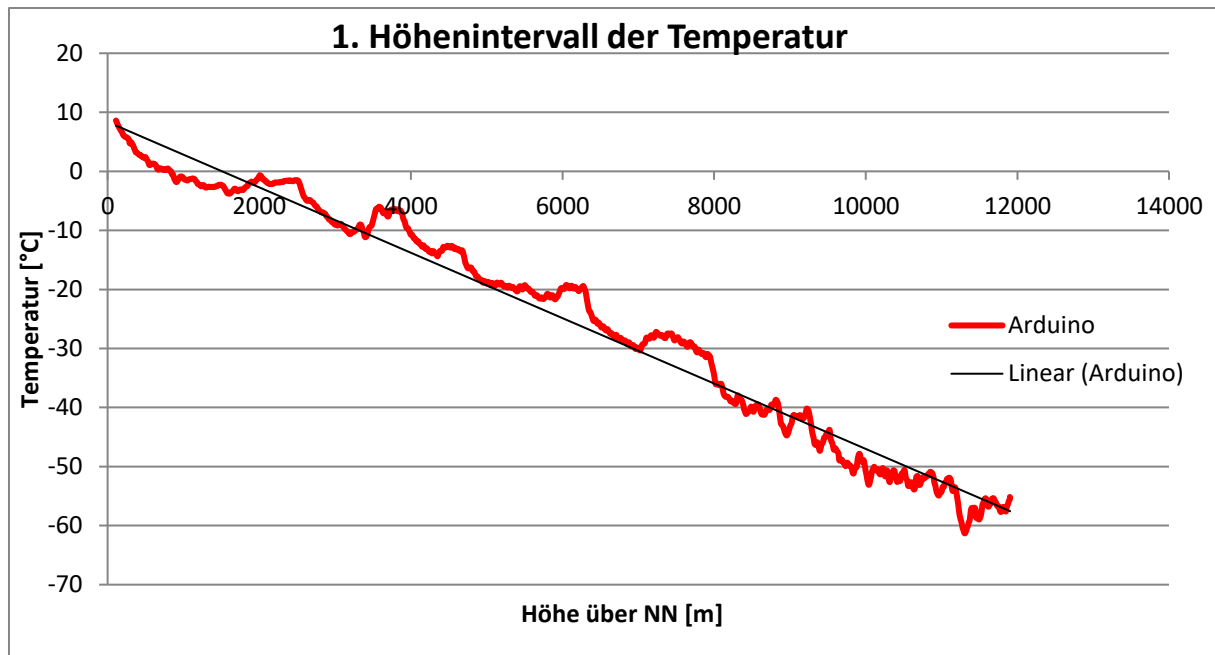
von der Höhe betrachten muss, um eine optimale Modellierung des Luftdrucks gewährleisten zu können.

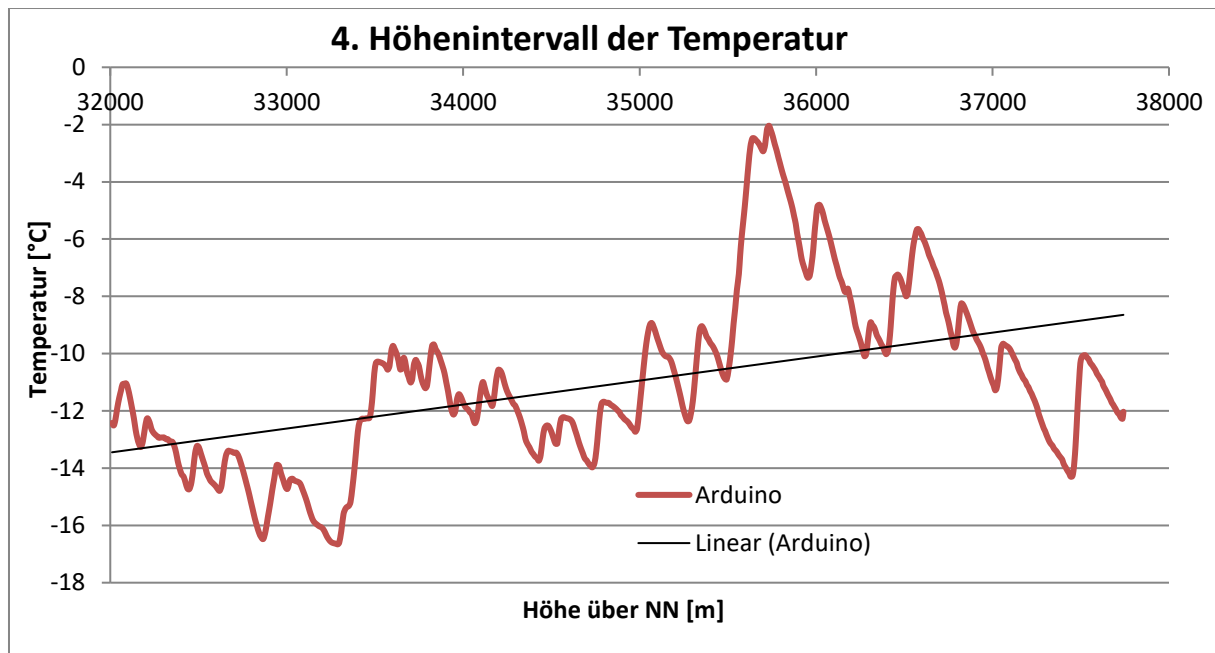
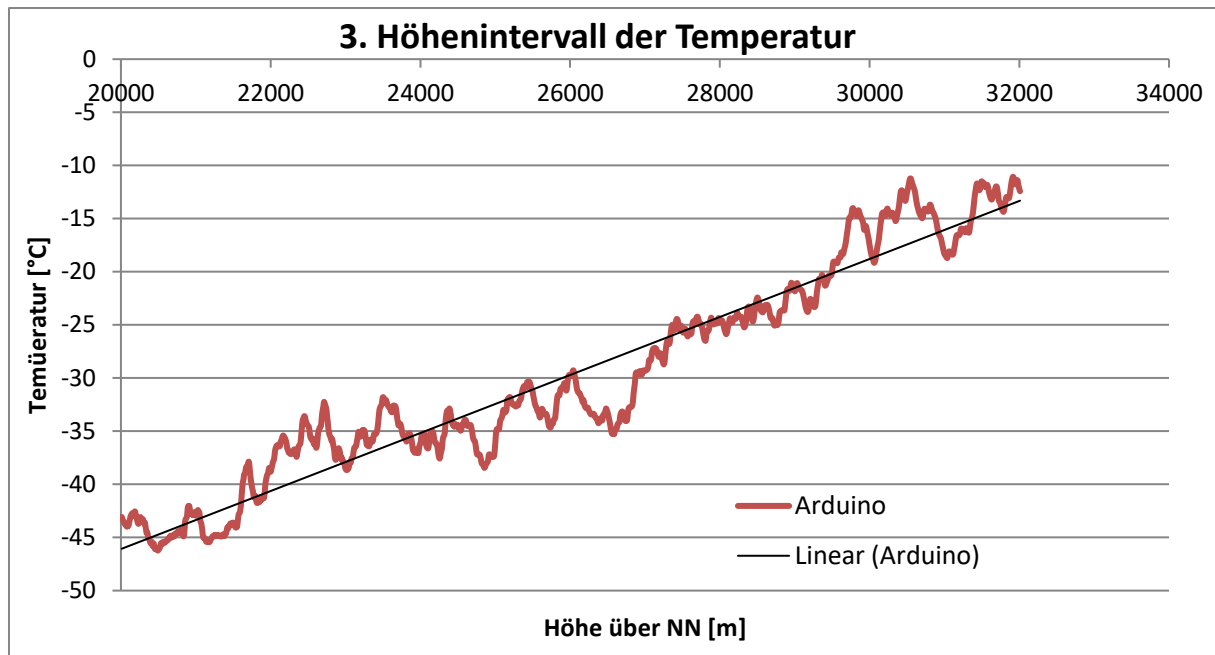
4.3 Vergleich mit der erweiterten barometrischen Höhenformel

Die erweiterte barometrische Höhenformel hat keinen speziell vorgegebenen Temperaturgradienten, was es ermöglicht die gemessenen Daten mit in die Berechnung einfließen zu lassen. Die Temperaturwerte des Arduino Due sehen in Abhängigkeit von der Höhe wie folgt aus:



Wie zu erkennen ist, gibt es ein Minimum der Temperatur bei ca. 12.000m. Der Temperaturgradient ist die Ableitung dieses Graphen. Da eine Modellierung eines Graphen welcher alle Temperaturveränderungen berücksichtigt zu aufwendig ist, teilt man den Graphen in vier verschiedene Graphen ein. In diesen kann man eine lineare Temperaturveränderung beobachten. Dementsprechend hat man dann auch vier verschiedene Temperaturgradienten. Die vier Graphen sehen wie folgt aus:





Die vier Temperaturgradienten ergeben sich aus der Ableitung der jeweiligen Funktion der Trendlinien:

1. Höhenintervall: $T_1 = -0,0055$

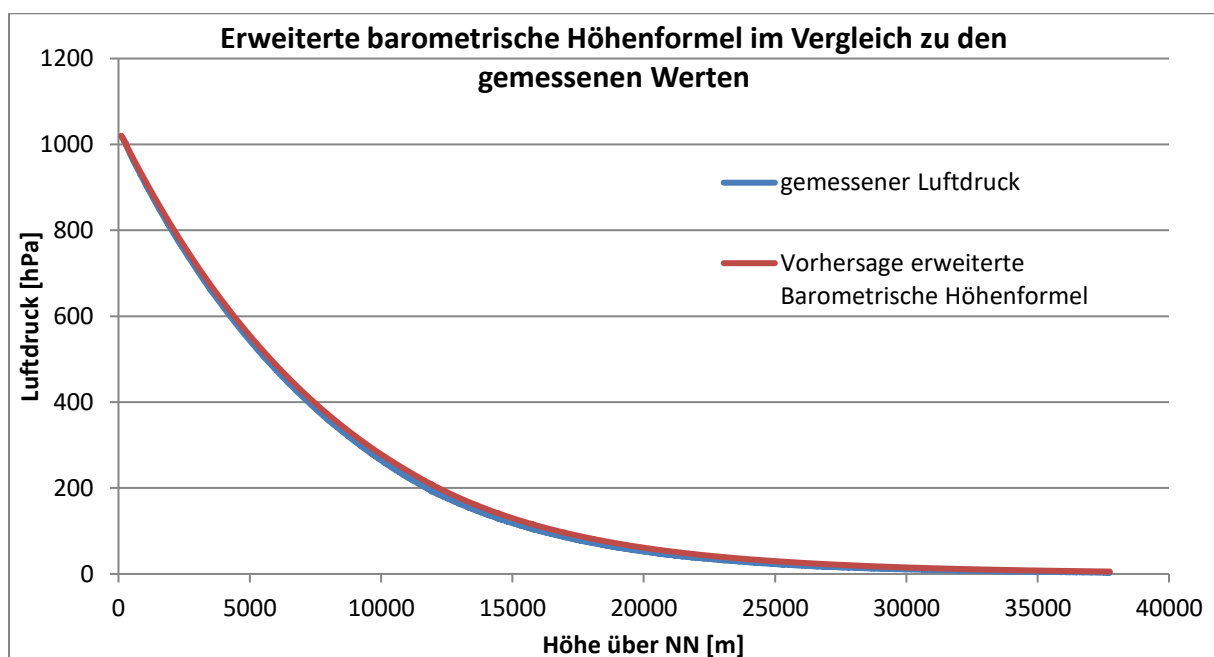
2. Höhenintervall: $T_2 = 0,0009$

3. Höhenintervall: $T_3 = 0,0027$

4. Höhenintervall: $T_4 = 0,0008$

Danach wurden die verschiedenen Temperaturgradienten in die erweiterte barometrische Höhenformel eingesetzt. Dabei muss man beachten, dass jedes Mal ein neues Höhenintervall betrachtet wird und dementsprechend mit den Höhenangaben wieder von Null begonnen werden muss. Es ist also notwendig, vier „verschiedene“ Formeln einzusetzen, um die bestmögliche Modellierung bekommen zu können.⁷

Nach Einsetzen der verschiedenen Temperaturgradienten in die erweiterte barometrische Höhenformel, ergibt sich das folgende Diagramm in Abhängigkeit von der Höhe, wobei der rote Graph die Vorhersage der erweiterten barometrischen Höhenformel ist und der blaue Graph die Messergebnisse beschreibt. Die Anfangswerte wurden wieder gleichgesetzt:

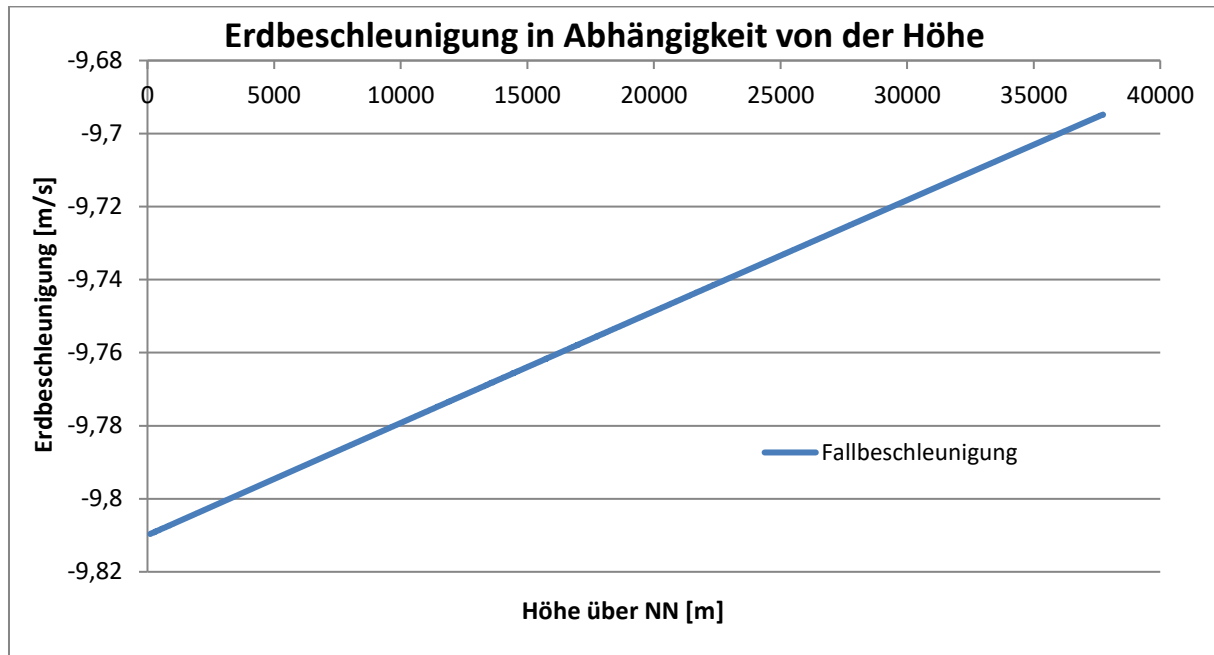


Da die erweiterte barometrische Höhenformel auch die Erdbeschleunigung berücksichtigt, kann es wichtig sein, die Abnahme der Erdbeschleunigung ebenfalls in die Formel mit einfließen zu lassen. Für die Erdbeschleunigung gilt: Je größer der Abstand zwischen einem beliebigen Objekt mit einer Masse und der Erde ist, desto geringer ist die Erdanziehungskraft auf dieses Objekt und damit auch die Erdbeschleunigung. Die Formel, um die Abnahme der Fallbeschleunigung auszurechnen, lautet:

⁷ [Tec-science], „Herleitung der erweiterten barometrischen Höhenformel (adiabatische Atmosphäre)“, <https://www.tec-science.com/de/mechanik/gase-und-fluessigkeiten/erweiterte-barometrische-hohenformel-fur-eine-adiabatische-atmosphere/#:~:text=Die%20erweiterte%20barometrische%20H%C3%B6henformel%20dient,Schichten%20ein%20linearer%20Temperaturverlauf%20angenommen.,Stand:01.06.2021>

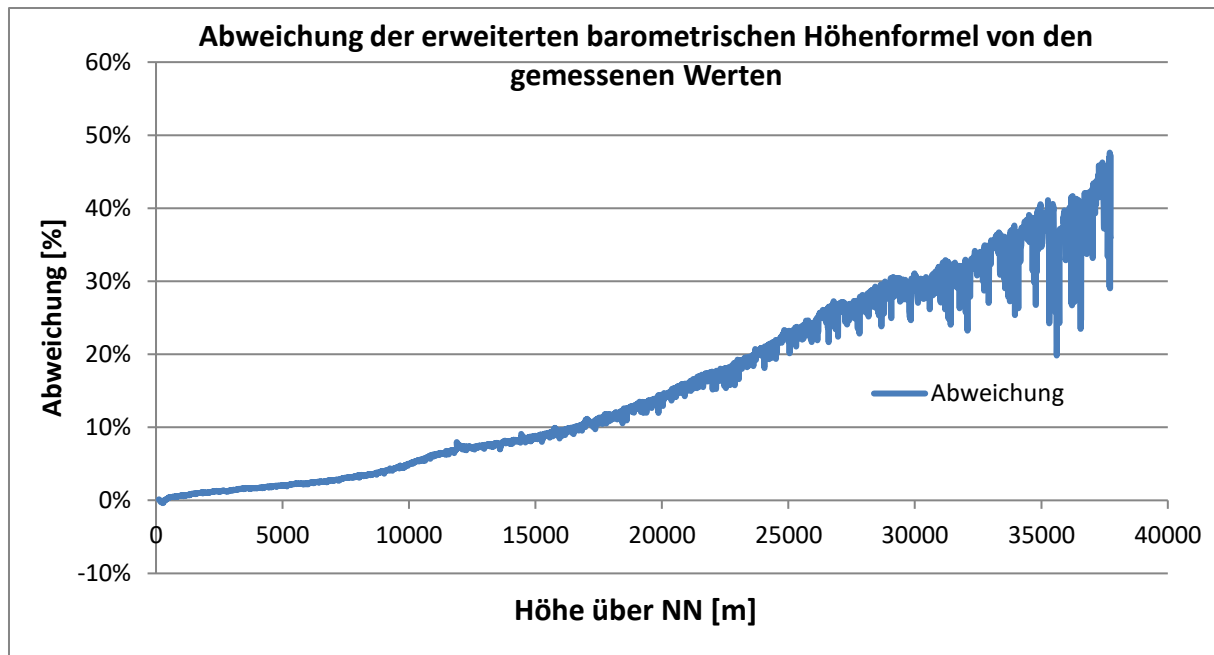
$$g(h) = \frac{-9,81}{\left(1 + \frac{h}{6371000}\right)^2}$$

6.371.000 ist der Radius der Erde in Metern und -9,81 die Erdbeschleunigung auf Meereshöhe in Meter pro Sekunde. Nach Einsetzen der Höhenwerte ergibt sich folgendes Diagramm:



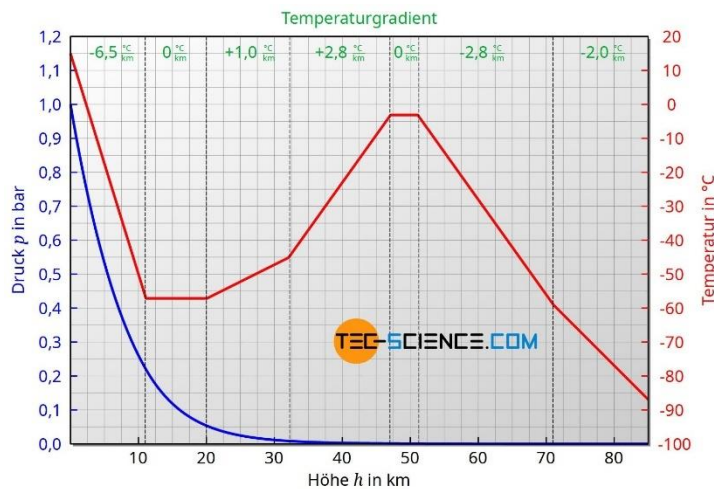
Wie zu erkennen, gibt es einen fast linearen Zusammenhang zwischen der Abnahme der Erdbeschleunigung und der Zunahme der Höhenmetern. Die Erdbeschleunigung auf 37.741 Metern beläuft sich auf -9,696 Meter pro Sekunde, was einer Abweichung von 1,17% im Vergleich zu dem Anfangswert auf Meereshöhe entspricht. Der Einfluss ist dementsprechend gering, trägt aber trotzdem zu einem genaueren Ergebnis bei.

Obwohl es eine Berücksichtigung der Temperaturabnahme und der Fallbeschleunigung gibt, weicht die Vorhersage von den gemessenen Werten ab und kommt bei der größten Höhe zu einer Abweichung von 47,2%. Zur besseren Darstellung wurde die Abweichung in Abhängigkeit von der Höhe in einem Diagramm dargestellt:



Wie zu erkennen ist, gibt es eine lineare Abweichung und eine große Schwankung der Abweichung bei den großen Höhenwerten. Eine Ursache, die zu den ungenauen Werten besonders bei den großen Höhenwerten beigetragen haben könnte, ist der Messbereich des Luftdrucksensors, welcher nur bis 10 hPa eine präzise Angabe gibt. Eine andere mögliche Ursache ist ein falscher Wert des Arduino Due, was unter anderem zu einem falschen Temperaturgradienten führen würde. Möglich ist, dass dieser um einen bestimmten Wert falsch gemessen hat. Nach Vergleich mit Literaturwerten stellt sich heraus, dass besonders in der Mitte des Fluges eine geringere Temperaturänderung hätte gemessen werden sollen:⁸

⁸ [Tec-science], „Herleitung der erweiterten barometrischen Höhenformel (adiabatische Atmosphäre)“, <https://www.tec-science.com/de/mechanik/gase-und-fluessigkeiten/erweiterte-barometrische-hohenformel-fur-eine-adiabatische-atmosphaere/#:~:text=Die%20erweiterte%20barometrische%20H%C3%B6henformel%20dient,Schichten%20ein%20linearer%20Temperaturverlauf%20angenommen.,Stand:01.06.2021>



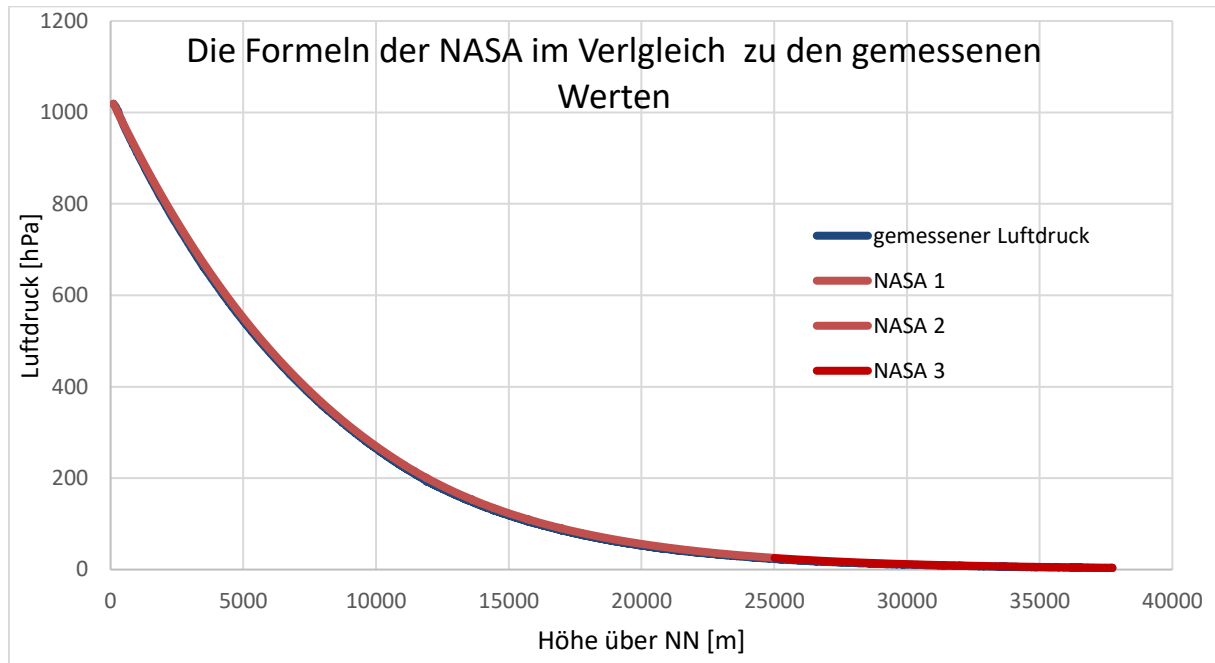
In dem Diagramm sind auch die Temperaturgradienten in $^{\circ}\text{C}$ pro Kilometer angegeben. Die Temperaturgradienten sind größtenteils geringer beziehungsweise negativer als die gemessenen, was auf eine größere Temperatur bei den gemessenen Temperaturen und den damit verbundenen geringerem Luftdruck bei der erweiterten barometrischen Höhenformel im Vergleich zu den gemessenen Werten hindeutet. Hier die ausgerechneten Temperaturgradienten des Arduino Due im Vergleich zu den Literaturwerten:

Höhe [km]	Arduino Due [$^{\circ}\text{C}/\text{km}$]	Literaturwerte [$^{\circ}\text{C}/\text{km}$]
0 - 11	-5,5	-6,5
11 - 20	0,9	0
20 - 32	2,7	1,0
32 - 37	0,8	2,8

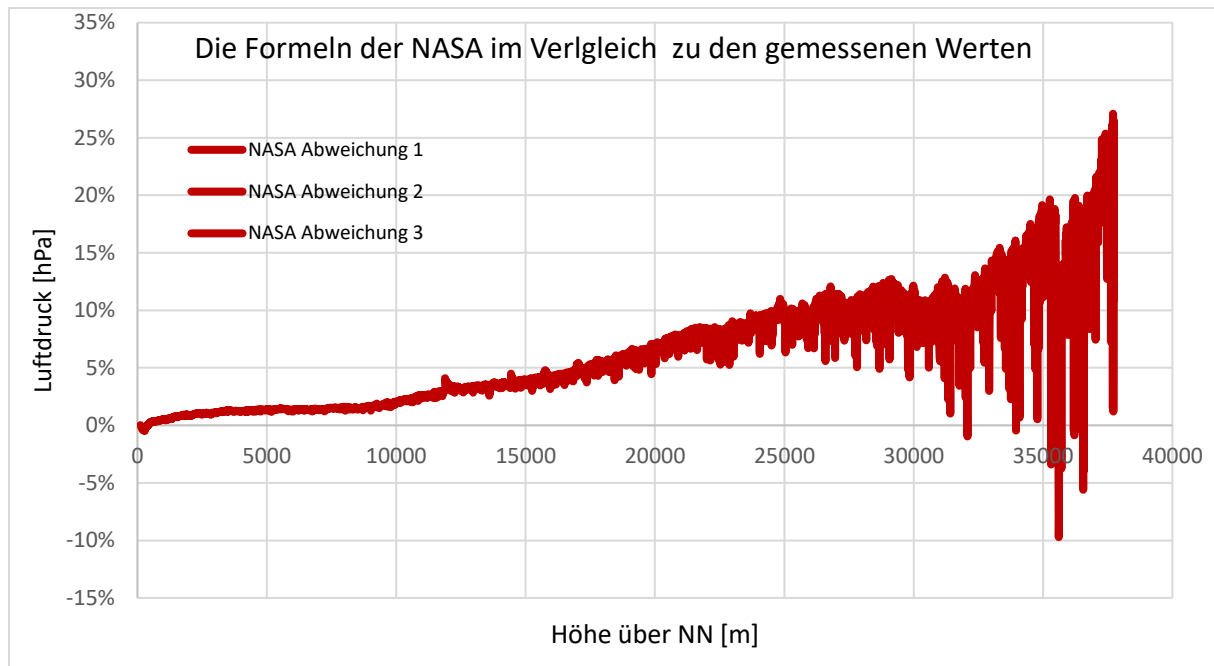
Da Literaturwerte meist mit genaueren Geräten aufgenommen wurden können diese von größerer Genauigkeit zeugen. Deswegen bietet es sich an, eine Modellierung des Luftdrucks mithilfe von Literaturwerten zu erstellen.

4.4 Vergleich mit NASA Formel

Die Formel der NASA stützt sich genau auf solche Literaturwerte. Nach Einsetzen der Höhenwerte in die drei verschiedenen Formeln gibt sich im Folgenden der rote Graph. Der blaue Graph gibt den gemessenen Luftdruck des Luftdrucksensors an:



Da die beiden Graphen sehr nah aneinander liegen und Sonderheiten nur schwer mit dem Auge erkennbar sind, wird für die Auswertung unter anderem der Graph der Abweichung von den beiden Graphen in Abhängigkeit von der Höhe verwendet. Eine Abweichung nach oben gibt dabei an, dass der jeweilige Wert der NASA größer ist als der von den gemessenen Werten. Dieses Diagramm sieht wie folgt aus:



Im Vergleich zu allen anderen Formeln ist die Formel der NASA mit Abstand die genaueste. Bei der ersten Formel der NASA, welche bis zu einer Höhe von 11.000m gilt, gibt es am Ende eine Abweichung von ca. 2,5%. An dieser Stelle kann man sich noch einmal auf die internationale Höhenformel beziehen, die fast dieselben Zahlen in ihrer Formel verwendet:

1. Formel der NASA:

$$p(h) = 1012,9 \cdot \left(\frac{(15,04 - 0,00649 \cdot h) + 273,1}{288,08} \right)^{5,256}$$

Internationale Höhenformel:

$$p(h) = 1013 \cdot \left(1 - \frac{6,5 \cdot h}{288.000} \right)^{5,255}$$

Auch die Werte sind beinahe dieselben. Des Weiteren ist der Temperaturgradient, der Anfangsdruck und der Exponent beinahe dieselben, was auf eine ähnliche Fehlerquelle in der Troposphäre schließen lassen würde. Danach wurde für die untere Stratosphäre (also bis 25km Höhe) die zweite Formel eingesetzt. In diesem Bereich wird, wie Anfangs erwähnt, eine konstante Temperatur von -56,46°C, also eine isotherme Atmosphäre, angenommen. Bei den Messergebnissen des Arduino Due hingegen wird in diesem Höhenintervall eine deutliche Temperaturveränderung wahrgenommen. Die bei der Auswertung der erweiterten barometrischen Höhenformel verwendeten Literaturwerte sehen ebenso dieselbe Temperatur wie die NASA vor. Eine Erklärung dafür ist, dass die Literaturwerte zu einem anderen Zeitpunkt und Ort aufgenommen wurden. Folglich weichen die Werte ab.

Bei den Werten des Luftdrucksensors gibt es, wie auf dem Diagramm zu erkennen, eine größere Abweichung als im ersten Höhenintervall. Wenn der Sensor ungenau wird, dann streuen sich die Werte viel mehr und der richtige Wert sollte mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit ebenfalls eintreffen. Selbst als die Luftdruckwerte noch innerhalb des exakten Messbereiches lagen, ist eine kontinuierliche Abweichung zu erkennen. Eine Erklärung für den geringeren Luftdruck sind die Literaturwerte, welche von den gemessenen Werten abweichen und somit die den geringeren Luftdruck erklären würden. Des Weiteren kann nicht nur die Temperaturveränderung je nach Ort und Zeit variieren, sondern auch die Abnahme des Luftdrucks, was auch die Abweichung bei der erweiterten barometrischen Höhenformel erklären würde.

Zusammenfassend lässt sich sagen, dass die NASA Formeln aufgrund ihrer genauen Werte besser als die anderen Formeln für die Modellierung des Luftdrucks geeignet sind. Allerdings wurden die Formeln durch Bildung von Mittelwerten erstellt und sind somit nicht genau, da Temperatur und Luftdruck je nach Ort und Zeit variieren können.

5. Zusammenfassung der Analyse

Nach der Analyse der verschiedenen Formeln hat sich herausgestellt, dass es einige zentrale Variablen gibt, welche man beachten muss, um eine möglichst genaue Vorhersage des Luftdrucks machen zu können. Nach der Analyse der barometrischen Höhenformel, welche von einer konstanten Temperatur ausgeht, hat sich herausgestellt, dass es wichtig ist die Temperaturveränderung in Abhängigkeit von der Höhe zu berücksichtigen. Mit den selbst gemessenen Temperaturen in der Troposphäre hat sich dies durch die internationale Höhenformel bestätigt. Da diese allerdings nur für die Troposphäre gilt und die Temperaturveränderung nicht immer gleich ist, muss man eine Formel verwenden, in welcher die Temperaturveränderung variabel ist. Dafür ist die erweiterte barometrisch Höhenformel geeignet. Mit den Messdaten des Arduino Due wurden die verschiedenen Temperaturgradienten ausgerechnet, welche in die Formel eingeflossen sind. Dies hat am Ende eine Abweichung von 47% ergeben. Da dieses Ergebnis unzureichend ist, wurde noch die NASA Formel verwendet, welche Literaturwerte verwendet. Die Ergebnisse waren „doppelt“ so gut wie die erweiterte barometrische Höhenformel, da am Ende nur eine Abweichung von rund 25% vorlag. Diese Abweichung ist damit zu erklären, dass die Literaturwerte der NASA-Formel aus vielen Messungen gewonnen wurden. Da Temperatur und auch Luftdruck je nach Ort und Zeit variieren können weichen die Werte von den gemessenen Werten des Luftdrucksensors ab.

Wie sich gezeigt hat ist es fast unmöglich alle Faktoren zu berücksichtigen und damit eine genaue Vorhersage zu treffen. Die Möglichkeiten einer genauen Modellierung des Luftdrucks wurden schon bei diesem Flug hinreichend ausgeschöpft. Das Einzige, was man verbessern könnte ist der Luftdrucksensor, da der Messbereich gegen Ende der Messung unterschritten wurde.